PROBABILITES

I. Vocabulaire des probabilités

1) Expérience aléatoire :

Définition : Une expérience est dite aléatoire lorsqu'on ne peut pas en prévoir avec certitude le résultat.

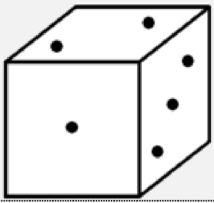
2) Issue et univers

Définition : On appelle issue d'une expérience aléatoire tout résultat de cette expérience.
L'ensemble des issues est appelé univers. *(On le note souvent Ω. Il peut être fini ou infini.)*
Un évènement est constitué d'une ou de plusieurs issues.

3) Evènement

Définition :
Tout ensemble d'issues est appelé événement.
Un événement élémentaire contient une seule issue.
L'événement certain contient toutes les issues.
L'événement impossible ne contient aucune issue.

Exemple : On jette un dé cubique et on repère le numéro obtenu.



On peut considérer les évènements suivants :

- S : « obtenir le nombre *six* »
- P : « obtenir un nombre *pair* »

II. Probabilités :

1) Définition :

Définition : On considère une expérience aléatoire.
A chaque événement élémentaire, on associe un nombre compris entre 0 et 1.
Lorsque la somme de tous ces nombres est égale à 1, on dit que l'on a défini une probabilité.
La probabilité d'un événement *(autre que l'événement impossible)* est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.
La probabilité de l'évènement A se note $p(A)$.

Remarques :

- La probabilité de l'évènement certain est égale à 1.
- La probabilité de l'évènement impossible est égale à 0.
- La probabilité p d'un évènement est comprise entre 0 et 1.
- La probabilité d'un événement représente la « chance » qu'un évènement se réalise. Elle peut être déterminée par des considérations de symétrie, de comparaison, ou encore géométriques.

Exemple : Lors du lancer d'un dé classique parfaitement équilibré,

- La probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 est égale à 1.
- La probabilité d'obtenir 8 est égale à 0.
- $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 6 \times \frac{1}{6} = 1$

2) Cas de l'équiprobabilité : *(Probabilités connues « a priori »)*

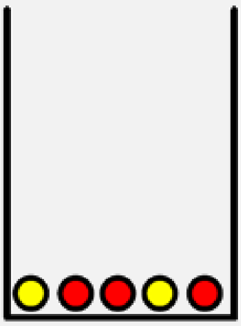
Définition : Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.
On suppose Ω fini ; on note n le nombre d'éléments de Ω *(n étant un nombre entier strictement positif)*.
Si l'on associe à chacun des n événements élémentaires contenus dans Ω la même probabilité, on dit qu'on est en situation d'équiprobabilité.
Alors pour tout x de Ω, on a : $p(\{x\}) = \frac{1}{n}$.

Propriété *(Formule de Laplace)*: Si l'univers Ω comporte n éléments,
En situation d'équiprobabilité, si k est un entier naturel inférieur ou égal à n , alors la probabilité d'un événement A à k éléments est : $p(A) = \frac{k}{n}$.

Autrement dit :

$$p(A) = \frac{nombre\ \ de\ cas\ favorables}{nombre\ \ de\ cas\ possibles}$$

Exemple :



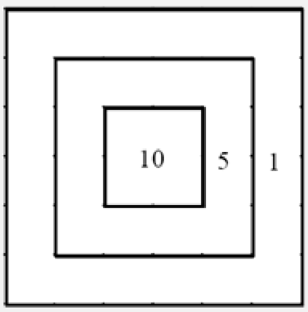
Dans l'urne ci-contre, les différentes boules étant indiscernables, on a 3 chances sur 5 d'obtenir une boule rouge et 2 chances sur 5 d'obtenir une boule jaune.

Ainsi, si l'on désigne par J l'évènement « obtenir une boule jaune », on a :

$$p(J) = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

Il y a donc 40 % de chance d'obtenir une boule jaune.

Exemple :



On imagine qu'un tireur tire parfaitement au hasard sur la cible ci-contre, sans jamais la rater !
Tous les carrés sont concentriques et leurs côtés ont pour mesure a, $2a$, $3a$.

Quelles sont les probabilités pour qu'il gagne 10 points, 5 points, 1 point ?

La probabilité relative à une région est proportionnelle à son aire : c'est le rapport de son aire à celle de la cible.

Réponse : $\frac{1}{9}$, $\frac{3}{9}$ et $\frac{5}{9}$

3) Approche fréquentiste *(Probabilités définies « a posteriori »)* :

Activité : Jeux du franc carreau + simulations tableur

Propriété : Si on répète une expérience aléatoire un très grand nombre de fois, la *fréquence de réalisation* de n'importe quel évènement A de cette expérience a de très grande chance d'être proche de la probabilité $p(A)$ de cet évènement.

Exemple : Quand on lance une pièce de monnaie bien équilibrée, on a une chance sur deux d'obtenir « *Pile* ». On pose donc $p(Pile) = 0{,}5$.

III. Evènements incompatibles

Définition : Soit A et B deux événements d'un même univers Ω.
A et B sont deux évènements incompatibles s'ils ne peuvent pas se produire en même temps.

Cela équivaut à dire qu'aucune issue ne peut réaliser à la fois A et B ou encore que la réalisation de l'un des deux événements A et B exclut celle de l'autre.

Exemple : Lors du lancer d'un dé, les évènements D : « obtenir le nombre 2 » et S : « obtenir un nombre supérieur ou égal à 4 » sont incompatibles.

Propriété : Si les évènements A et B sont incompatibles, alors $p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B)$

Exemple : Dans les conditions de l'exemple précédent, en comptant les issues, on trouve facilement que $p(D) = \frac{1}{6}$ et que $p(S) = \frac{3}{6}$
Comme ces deux évènements sont incompatibles, alors :

$$p(D \text{ ou } S) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6}$$

IV. Evènements contraires

Définition : Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire et A un événement de cet univers.
L'événement contraire de A, noté « *non A* », est l'ensemble de toutes les issues de l'univers Ω n'appartenant pas à A.

Exemple : Lors du lancer d'un dé, l'évènement « *non D* » *(où D désigne « obtenir le nombre 2 »)* est constitué de 5 issues *(« obtenir le nombre 1 » ; « obtenir le nombre 3 » ; « obtenir le nombre 4 » ; « obtenir le nombre 5 » et « obtenir le nombre 6 »).*

Propriété : Comme les évènements A et « *non A* » sont incompatibles, on a :

$$p(A) + p(\text{non } A) = 1$$

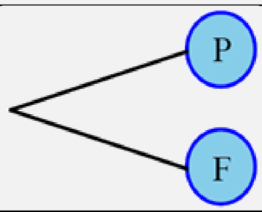
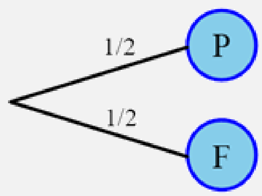
Conséquence : $p(\text{non } A) = 1 - p(A)$

Exemple : Dans les conditions de l'exemple précédent, en comptant les issues, on trouve facilement que $p(D) = \frac{1}{6}$
Par conséquent, d'après la propriété précédente $p(\text{non } D) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

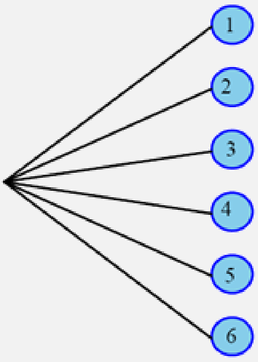
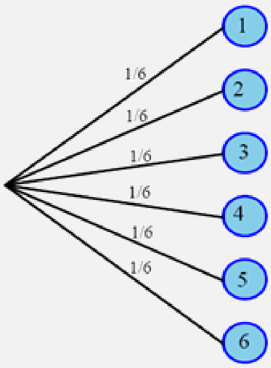
V. Moyens de représentation

Définition : l'arbre des possibles d'une expérience aléatoire indique chacune de ses issues.
Quand on fait figurer sur chaque branche la probabilité associée, on dit qu'on pondère l'arbre des possibles.

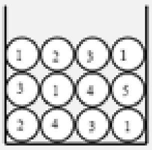
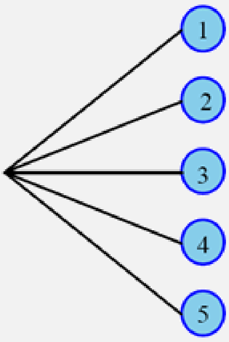
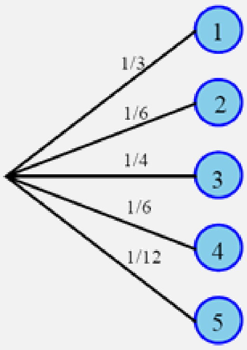
Exemple :

Situation	Arbre des possibles	Arbre pondéré avec les probabilités
Tirage à pile ou face		

Exemple :

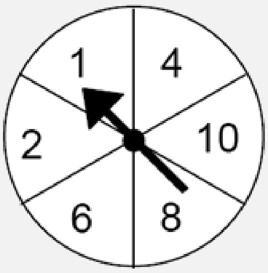
<table>
<tr><th>Situation</th><th>Arbre des possibles</th><th>Arbre pondéré avec les probabilités</th></tr>
<tr><td>Lancer d'un dé équilibré</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

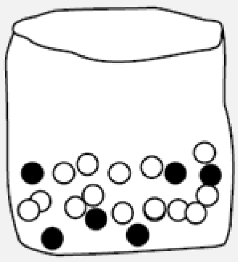
Exemple :

<table>
<tr><th>Situation</th><th>Arbre des possibles</th><th>Arbre pondéré avec les probabilités</th></tr>
<tr><td>Tirage d'une boule dans l'urne
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Propriété : Dans un arbre, la probabilité de l'issue auquel conduit un chemin est égal au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.

Exemple d'expérience à deux épreuves :
Un stand de la foire du printemps propose un jeu dans lequel il faut tourner une roulette. Ensuite, si la roulette s'arrête sur un nombre pair, le joueur peut tirer une balle dans un sac. La roulette et le sac de bille sont représentés ci-dessous. Des prix sont distribués aux joueurs qui tirent une bille noire. Suzy tente sa chance une fois.





Concernant le fait que Suzy gagne un prix, peut-on dire que :

- C'est impossible
- C'est peu probable
- Il y a environ une chance sur deux
- C'est très probable
- C'est certain