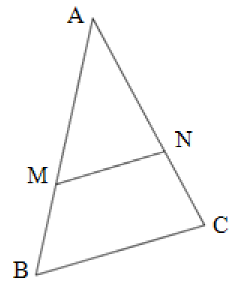
Démonstration du théorème de Thalès

Partie I : Version 4ème *(M appartient à [AB])*



Dans le triangle ABC ci-contre :

→ Le point M appartient au segment $[AB]$

→ Le point N appartient au segment $[AC]$

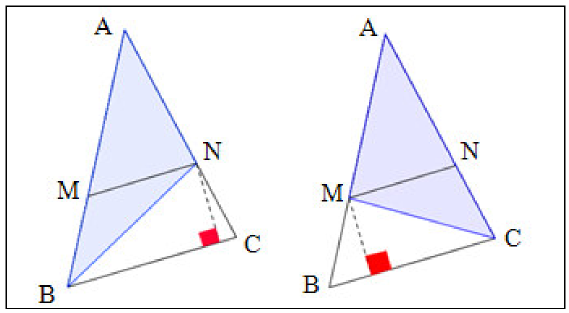
→ $(MN)\ //\ (BC)$

Démontrer que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Première égalité :

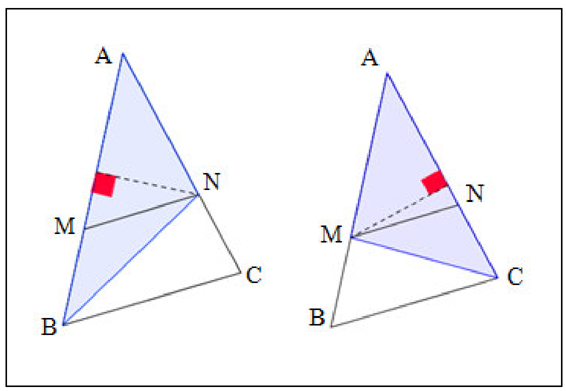
L'objectif de cette première égalité est de prouver l'égalité $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

1) En vous aidant des deux figures ci-contre, justifiez chacune des égalités suivantes :



- $Aire\ BCN = Aire\ BCM$
- $Aire\ ABN = Aire\ ACM$
- $\frac{Aire\ AMN}{Aire\ ABN} = \frac{Aire\ AMN}{Aire\ ACM}$

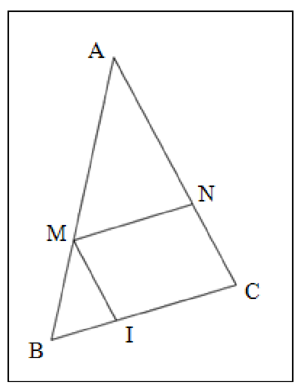
2) En vous aidant des deux figures ci-contre, et de la question 1), justifiez chacune des égalités suivantes :



- $\frac{Aire\ AMN}{Aire\ ABN} = \frac{AM}{AB}$
- $\frac{Aire\ AMN}{Aire\ ACM} = \frac{AN}{AC}$
- $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Seconde égalité :

L'objectif de cette seconde égalité est de prouver l'égalité $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$



On complète la figure en traçant la droite passant par le point M et parallèle à la droite (AC). Elle coupe $[BC]$ au point I.

1) En vous aidant de la première partie, justifiez l'égalité suivante :

$$\frac{BM}{BA} = \frac{BI}{BC}$$

2) Après avoir justifié que MNCI est un parallélogramme, en déduire que :

$$IC = MN$$

3) En utilisant la figure ci-contre, et les résultats précédents, justifiez les égalités suivantes :

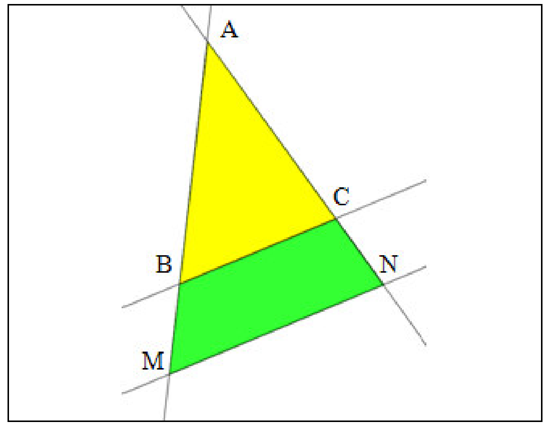
$\frac{BA}{BA} = \frac{BC}{BC}$ $\qquad$ $\frac{BA}{BA} - \frac{BM}{BA} = \frac{BC}{BC} - \frac{BI}{BC}$ $\qquad$ $\frac{BA - BM}{BA} = \frac{BC - BI}{BC}$

$\frac{MA}{BA} = \frac{IC}{BC}$ $\qquad$ $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$

Démonstration du théorème de Thalès *(Suite)*

Partie II : on va un peu plus loin *(B appartient à [AM])*

1) On considère désormais la figure ci-contre, avec :
   - → M est un point de (AB) tel que B appartienne au segment $[AM]$.
   - → N est un point de (AC) tel que C appartienne au segment $[AN]$.
   - → (BC) // (MN)

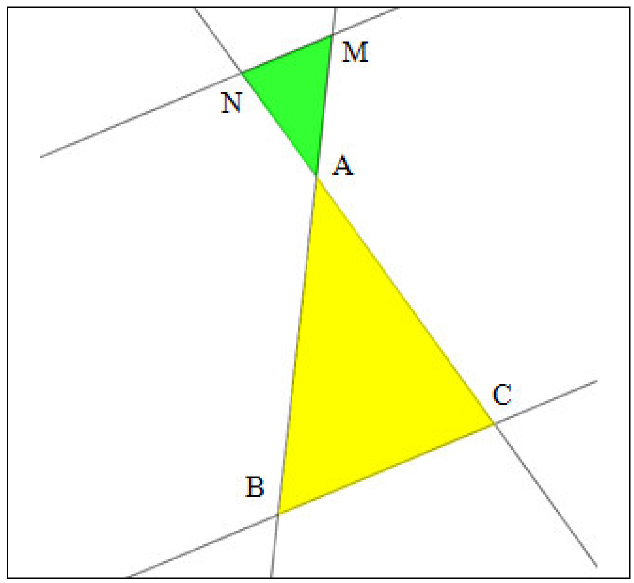


2) Démontrer que :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Partie III : encore plus loin *(configuration papillon)*

1) On considère enfin la figure ci-contre avec ABC et AMN deux triangles tels que :
   - → B, A et M alignés tel que A appartienne au segment $[CN]$
   - → C, A et N alignés tel que A appartienne au segment $[BM]$
   - → (NM) // (BC)



2) Placer le point N' symétrique de N par rapport à A et le point M' symétrique de M par rapport à A

3) Démontrer que les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles et en déduire que les droites $(M'N')$ et (BC) sont parallèles

4) Prouver que $AN = AN'$; $AM = AM'$ et $NM = N'M'$

5) En utilisant la propriété sur la proportionnalité des longueurs dans un triangle, démontrer que $\frac{AM'}{AB} = \frac{AN'}{AC} = \frac{M'N'}{BC}$

6) En déduire $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

BILAN :

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………