

THEOREME DE PYTHAGORE ET RECIPROQUE

I. Théorème de Pythagore :1) Enoncé :

Activité n°1 : Conjecture du théorème de Pythagore.

Théorème :

Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

C'est-à-dire, si ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Activité n°2 : Preuve du théorème de Pythagore.

2) Utilisation pour déterminer des longueurs dans un triangle rectangle :

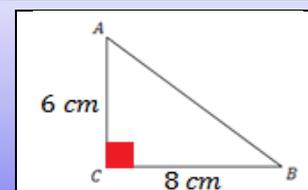
On utilise le théorème de Pythagore pour déterminer une longueur dans un triangle rectangle.

Exemple 1 :

Soit ABC un triangle rectangle en C .

On donne $AC = 6 \text{ cm}$ et $BC = 8 \text{ cm}$. Calculer AB .

Dans ce 1^{er} cas, il s'agit de **déterminer la longueur de l'hypoténuse**.



Méthode :

Comme le triangle ABC est rectangle en C ,

Vérification de la **condition**

Alors, d'après le **théorème de Pythagore**, on a :

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hypoténuse}}}{AB^2} = \underset{\substack{\swarrow \quad \searrow \\ \text{les deux autres côtés}}}{AC^2 + BC^2}$$

Propriété : Le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

On remplace les deux côtés dont on connaît la longueur par leurs valeurs numériques :

$$\begin{aligned} AB^2 &= 6^2 + 8^2 \\ &= 36 + 64 = 100 \end{aligned}$$

Donc d'après la calculatrice,

$$AB = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

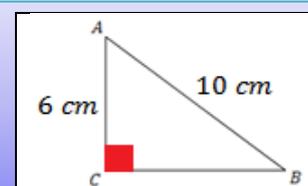
Une fois que le carré de la longueur à déterminer est trouvé, il ne reste plus qu'à **prendre la racine carrée** de ce nombre pour trouver la valeur demandée

Exemple 2 :

Soit ABC un triangle rectangle en C .

On donne $AB = 10 \text{ cm}$ et $AC = 6 \text{ cm}$. Calculer BC .

Dans ce 2nd cas, il s'agit de **déterminer la longueur d'un des deux côtés de l'angle droit**.



Méthode :

Comme le triangle ABC est rectangle en C ,

Vérification de la **condition**

Alors, d'après le **théorème de Pythagore**, on a :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

\uparrow Hypoténuse $\swarrow \searrow$ les deux autres côtés

Propriété : Le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

On remplace les deux côtés dont on connaît la longueur par leurs valeurs numériques :

$$10^2 = 6^2 + BC^2$$

On **isole** alors le côté dont on cherche la longueur :

$$BC^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

Donc d'après la calculatrice,

$$BC = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$

Une fois que le carré de la longueur à déterminer est trouvé, il ne reste plus qu'à **prendre la racine carrée** de ce nombre pour trouver la valeur demandée

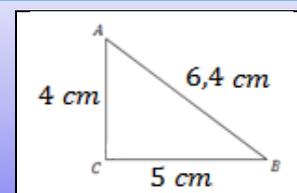
3) Utilisation pour démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle :

Exemple :

Soit ABC un triangle tel que :

$$BC = 5 \text{ cm}, AC = 4 \text{ cm} \text{ et } AB = 6,4 \text{ cm}$$

Démontrez que le triangle ABC n'est pas rectangle.

**Méthode :**

Comme AB est supérieur à BC et AC .

Si le triangle ABC est rectangle, il l'est en C et $[AB]$ serait son hypoténuse.

Repérer quel côté est susceptible de jouer le rôle de l'hypoténuse

On calcule donc **séparément** :

$$\bullet AB^2 = 6,4^2 = 40,96$$



Hypoténuse présumée

Calculer séparément le carré de la longueur de son hypoténuse présumée et la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

$$\bullet BC^2 + AC^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$$



les deux autres côtés

Constater que l'égalité de ces deux calculs est fausse et **conclure**

Comme $AB^2 \neq BC^2 + AC^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle.

En effet s'il l'était, d'après le **théorème de Pythagore**, l'égalité serait vraie.

II. Réciproque du théorème de Pythagore :

1) Énoncé :

Théorème :

Dans un triangle, si le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

C'est-à-dire, si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A .

Méthode : il faut donc absolument calculer séparément $AB^2 + AC^2$ et BC^2

Remarques : Attention à l'importance de la valeur exacte !!!

2) Utilisation pour démontrer qu'un triangle est rectangle :

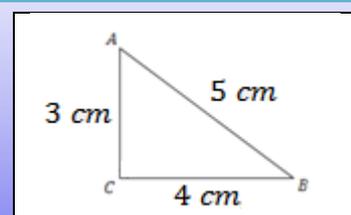
Attention : Il faut connaître les mesures des 3 côtés du triangle et repérer le plus grand côté.

Exemple :

Soit ABC un triangle tel que :

$$BC = 4 \text{ cm}, AC = 3 \text{ cm} \text{ et } AB = 5 \text{ cm}$$

Démontrez que le triangle ABC est rectangle.



Méthode :

Comme AB est supérieur à BC et AC .

Si le triangle ABC est rectangle, il l'est en C et $[AB]$ serait son hypoténuse.

On calcule donc **séparément** :

$$\bullet \quad AB^2 = 5^2 = 25$$



Hypoténuse présumée

$$\bullet \quad BC^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$



les deux autres côtés

Comme $AB^2 = BC^2 + AC^2$, alors d'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle ABC est rectangle en C .

Repérer quel côté est susceptible de jouer le rôle de l'hypoténuse

Calculer séparément le carré de la longueur de son hypoténuse présumée et la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Constater que l'égalité de ces deux calculs est vraie et conclure