THEOREME DES MILIEUX

I. Théorème des milieux :

1) Deux premiers énoncés :

Activité n°1 : Conjecture des deux premiers énoncés des théorèmes des milieux d'un logiciel de géométrie dynamique + Preuves

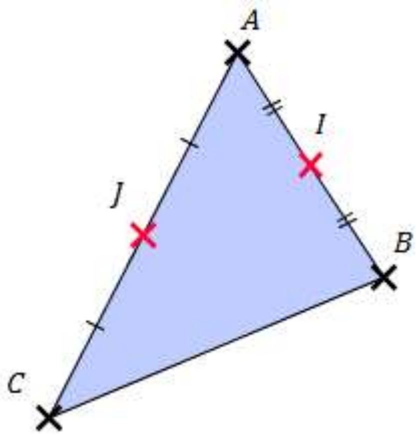
Théorème 1 :

Dans un triangle, si une droite passe par le milieu de deux cotés alors elle est parallèle au troisième.

Théorème 2 :

Dans un triangle, si un segment joint les milieux des deux côtés alors il mesure la moitié du troisième coté.

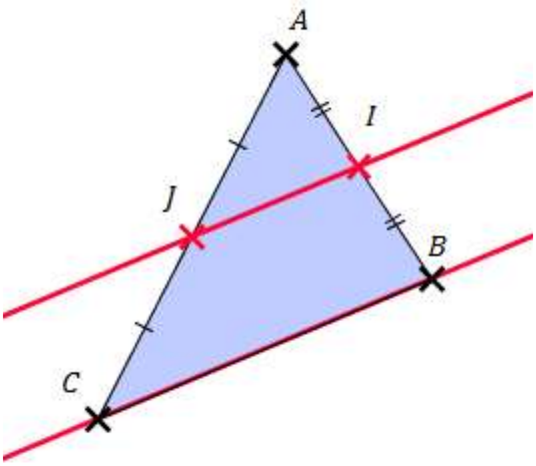
Hypothèses :



I milieu du segment $[AB]$

J milieu du segment $[AC]$

Conclusion :



Théorème 1 : $(IJ) // (BC)$

Théorème 2 : $IJ = \frac{BC}{2}$

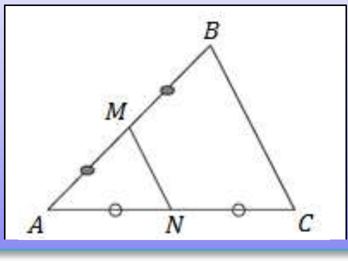
2) Quand utiliser ces théorèmes :

Il faut avoir un triangle et les milieux de deux de ses côtés.

- Le *premier énoncé* sert à **démontrer que deux droites sont parallèles**.
- Le *second énoncé* sert à **calculer une distance**.

Exemple :

Soit un triangle ABC quelconque.
Soient M le milieu du segment $[AB]$ et N le milieu du segment $[AC]$.
On sait que $AC = 6\ cm$; $AB = 5{,}6\ cm$ et $BC = 4\ cm$
Un schéma de la situation a été réalisé ci-contre.



Question 1: Montrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
Question 2 : Calculer MN

Méthode :

Réponse à la question 1 :

On sait que, dans un triangle, si **une droite passe par** les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième.

Citer la propriété
(A apprendre par cœur)

Comme :
- M est le milieu de [AB]
- N est le milieu de [AC]

Signaler que, dans l'exercice, les conditions d'application de la propriété sont effectivement réunies

Alors (MN) // (BC)

Conclure

Réponse à la question 2 :

On sait que, dans un triangle, si **un segment joint** les milieux de deux côtés alors il mesure la moitié du troisième.

Citer la propriété
(A apprendre par cœur)

Comme :
- M est le milieu de [AB]
- N est le milieu de [AC]

Signaler que, dans l'exercice, les conditions d'application de la propriété sont effectivement réunies

Alors $MN = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2\ cm$

Conclure

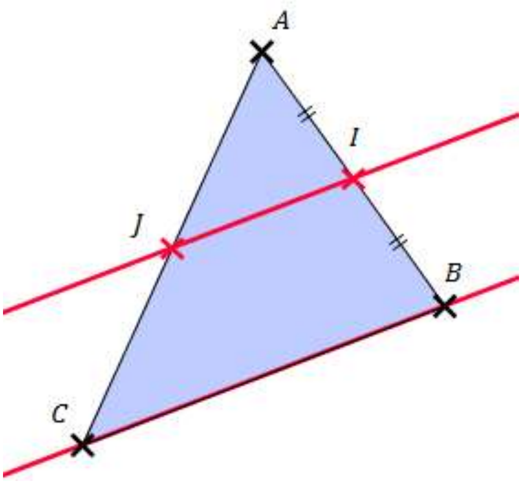
3) Troisième énoncé :

Activité n°2 : Conjecture du troisième énoncé du théorème des milieux à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique + Preuve.

Théorème 3 :

Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et si elle est parallèle à un autre côté, alors elle coupe le troisième en son milieu.

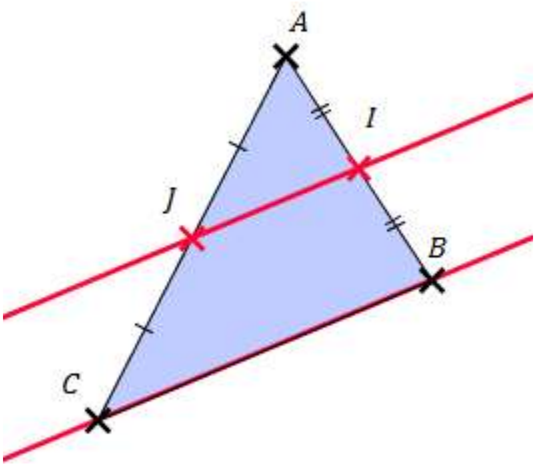
Hypothèses :



I milieu du segment $[AB]$

La droite passant par I et parallèle à (BC) coupe le côté $[AC]$ en J (Ainsi, (IJ) // (BC))

Conclusion :



Théorème 3 : J milieu du segment $[AC]$

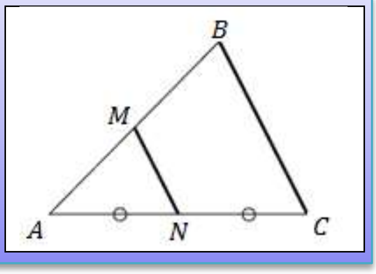
4) Quand utiliser ce dernier énoncé :

Il faut avoir un triangle, le milieu d'un de ses côtés et une droite passant par ce point en étant parallèle à un autre côté.

Le *troisième énoncé* sert à **démontrer qu'un point est milieu d'un segment.**

Exemple :

Soit un triangle ABC quelconque.
Soit N le milieu du segment $[AC]$.
La parallèle à (BC) passant par N coupe (AB) en M.
Un schéma de la situation a été réalisé ci-contre.



Question : Montrer que le point M est le milieu du segment [AB].

Méthode :

On sait que, dans un triangle, si **une droite passe par** le milieu d'un côté en étant parallèle à un autre alors elle coupe le troisième en son milieu.

Citer la propriété
(A apprendre par cœur)

Comme :
- $\boldsymbol{N}$ est le milieu de [$\boldsymbol{AC}$]
- ($\boldsymbol{NM}$) // ($\boldsymbol{BC}$)

→ Signaler que, dans l'exercice, les conditions d'application de la propriété sont effectivement réunies

Alors le point $\boldsymbol{M}$ est le milieu de [$\boldsymbol{AB}$]

Conclure