TRIANGLES RECTANGLES ET CERCLES

I. Prérequis :

1) Médiane :

Définition :
Dans un triangle, une médiane est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé.

2) Médiatrices :

Définition :
Dans un triangle, la médiatrice d'un côté est la droite perpendiculaire à ce côté passant par son milieu.

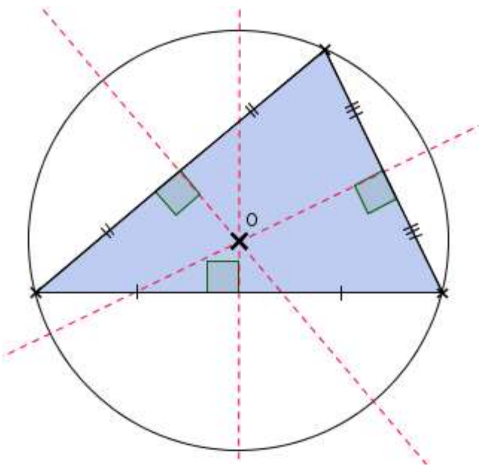
Propriété :

- Si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de ce segment.
  C'est-à-dire, par exemple, si M appartient à la médiatrice de $[AB]$ alors $MA = MB$.
- Réciproquement, si un point est équidistant des extrémités d'un segment alors il appartient à la médiatrice de ce segment.
  C'est-à-dire, par exemple, si M est un point tel que $MA = MB$ alors M appartient à la médiatrice de $[AB]$.

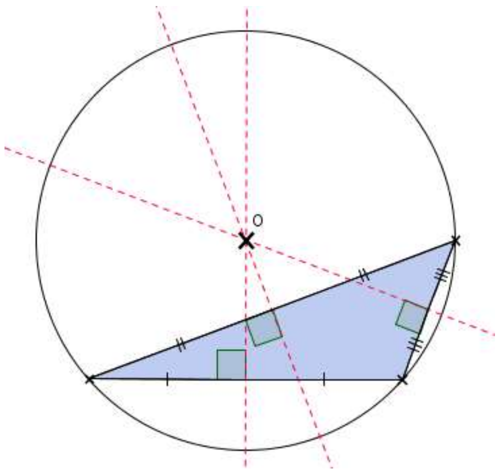
Activité n°1 : Les médiatrices d'un triangle sont concourantes, une conjecture.

Propriété :
Les médiatrices d'un triangle *non aplati* se coupent en un même point, on dit qu'elles sont concourantes.
Le point de concours des médiatrices est le centre d'un cercle passant par les trois sommets de ce triangle.

Définition :
Ce cercle est appelé cercle circonscrit au triangle.



1er cas : Si les 3 angles du triangle sont aigus,alors le centre du cercle circonscrit au triangle est à l'intérieur du triangle.



2nd cas : Si l'un des angles est obtus, alors le centre du cercle circonscrit au triangle est à l'extérieur du triangle.

Activité n°2 : Les médiatrices d'un triangle sont concourantes, une preuve.

Question : Que se passe-t-il donc lorsque le triangle est rectangle ?

II. Triangles rectangles et cercles :

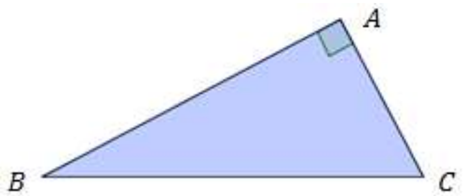
1) Théorème direct :

Activité n°3 : Conjecture de la position du centre du cercle circonscrit d'un triangle rectangle.

Théorème :

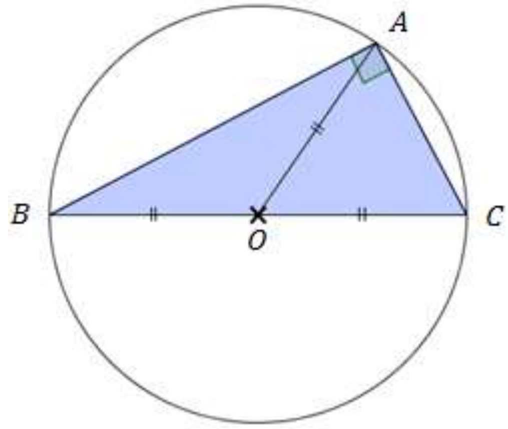
Si un triangle est rectangle, alors le centre du cercle qui lui est circonscrit est le milieu de son hypoténuse.

Hypothèses :



Le triangle ABC est rectangle en A

Conclusion :



Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le milieu O de son hypoténuse $[BC]$

Il existe deux autres énoncés équivalents pour ce théorème :

Théorèmes :

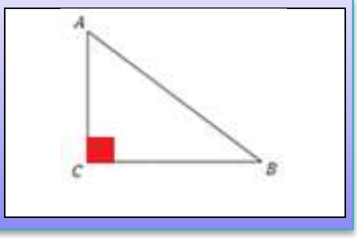
- Si un triangle est rectangle, alors le sommet de l'angle droit appartient au cercle de diamètre l'hypoténuse.
- Si un triangle est rectangle, alors la médiane relative à l'hypoténuse mesure la moitié de l'hypoténuse.

Activité n°4 : Si un triangle est rectangle alors le centre du cercle qui lui est circonscrit est le milieu de son hypoténuse, une démonstration.

Exemple :

Soit ABC un triangle rectangle en C.

Question : Montrer que le point C appartient au cercle de diamètre [AB].



Méthode :

On sait que si un triangle est rectangle,
alors le sommet de l'angle droit appartient au cercle de diamètre l'hypoténuse.

Comme le triangle $\boldsymbol{ABC}$ est rectangle en $\boldsymbol{C}$,

Alors le point $\boldsymbol{C}$ appartient au cercle de diamètre [$\boldsymbol{AB}$].

Citer la propriété
(A apprendre par cœur)

Vérification de la condition

Conclusion

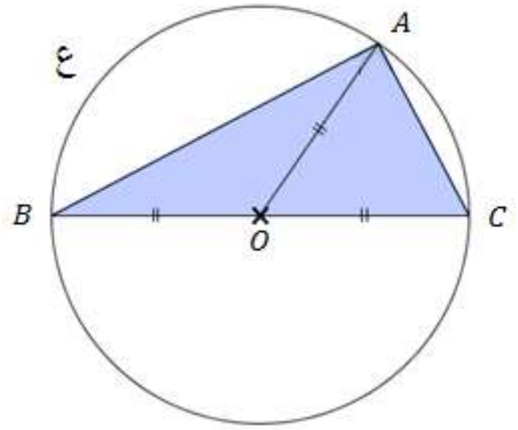
2) Théorème réciproque :

Activité n°5 : Conjecture du théorème réciproque à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Théorème :

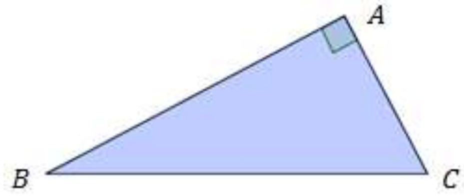
Si dans un triangle le cercle circonscrit a pour diamètre un de ses côtés alors le triangle est rectangle *(et ce diamètre est son hypoténuse)*

Hypothèses :



A appartient au cercle $\mathscr{C}$
$[BC]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$

Conclusion :



Le triangle ABC est rectangle en A

Il existe deux autres énoncés équivalents pour ce théorème :

Théorèmes :

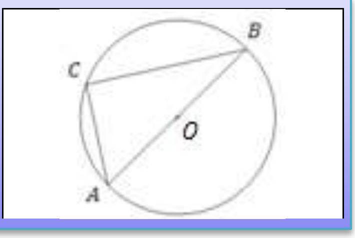
- Si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre de ce cercle, alors on obtient un triangle rectangle.
- Si la médiane relative à un côté d'un triangle mesure la moitié de ce côté alors le triangle est rectangle *(et ce côté est son hypoténuse)*

Activité n°6 : En joignant un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre de ce cercle on obtient un triangle rectangle, une démonstration

Exemple :

Soit $\mathscr{C}$ un cercle et $[AB]$ un de ses diamètre.
On considère un point C appartenant à ce cercle.

Question : Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifiez.



Méthode :

Rédaction	Étape
On sait que si l'on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre de ce cercle alors on obtient un triangle rectangle.	Citer la propriété *(A apprendre par cœur)*
Comme le point C appartient au cercle de diamètre $[AB]$,	Vérification de la condition
alors le triangle ABC est rectangle en C.	Conclusion

III. Distance :

1) Distance d'un point à une droite :

Activité n°7 : Distance d'un point à une droite, une conjecture.

Propriété :

Le point d'une droite le plus proche d'un point donné est le pied de la perpendiculaire menée du point à la droite.

Définition :

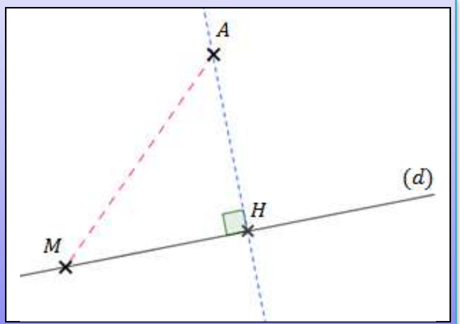
La distance joignant alors ces deux points est appelée distance du point à la droite.

Activité n°8 : Distance d'un point à une droite, une preuve.

Exemple :

La droite (AH) est perpendiculaire en A à (d).
Donc AH est la distance de A à la droite (d).

De plus, si M est un point quelconque de (d) différent de H,
alors $AM > AH$.

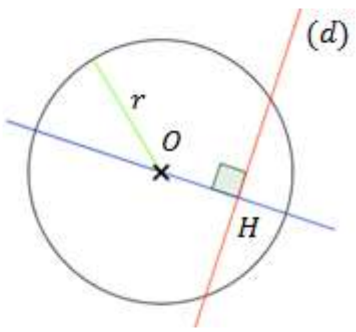


2) Utilisation pour déterminer la position relative d'une droite et d'un cercle :

On considère un cercle de centre O et de rayon r.
Une droite (d) est perpendiculaire en H à l'un de ses diamètres.
La distance OH est la distance du centre à la droite (d).

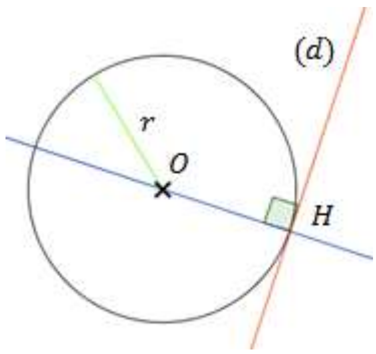
Trois cas de figure sont alors possibles :

a. $OH < r$



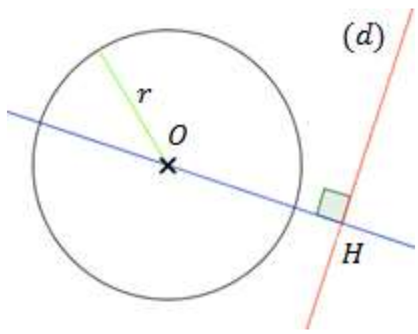
La droite est sécante au cercle
Ils ont alors deux points communs

b. $OH = r$



La droite est tangente au cercle Il n'y a alors qu'un seul point en commun : H

c. $OH > r$



La droite est extérieure au cercle
Ils n'ont aucun point en commun

3) Tangente à un cercle en l'un de ses points :

Définition :

La tangente à un cercle en un point est la perpendiculaire au rayon en ce point.